

广义 von Neumann 常数的几何性质

赵亮, 赵平安

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:空间几何常数是空间几何性质的一种量化。为了进一步应用几何常数研究 Banach 空间的几何结构, 通过引入一个新的广义 von Neumann 常数, 给出了广义 von Neumann 常数的连续性、对称性、有界性以及广义 von Neumann 常数的等价形式, 并用其判别了 Banach 空间的一致非方性, 通过两个例子给出几个特殊 Banach 空间的广义 Von Neumann 常数的计算式或估值。

关键词:广义 von Neumann 常数; 连续性; 对称性; 有界性; 一致非方

DOI:10.15938/j.jhust.2023.04.017

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)04-0138-07

Geometric Properties of Generalized Von Neumann Constant

ZHAO Liang, ZHAO Pingan

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Spatial geometric constant is a quantization of the properties of spatial geometry. In order to further apply the geometric constant to study the geometry of the Banach space, a new generalized von Neumann constant is introduced. We give the continuity, symmetry, boundedness and the equivalent form of the generalized von Neumann constant, and judge the consistent non-square of the Banach space, and give the calculation formula or valuation of several special Banach space with two examples.

Keywords: generalized von neumann constant; continuity; symmetry; boundedness; uniformly non-square

0 引言

2005年, Gao J^[1]引入了几个带参数的常数 $e_s(X)$, $E_s(X)$, $f_s(X)$, $F_s(X)$, 介绍了它们的一些几何性质, 并且分别讨论了它们与正规结构及一致正规结构的关系, 同时给出这些常数在一些经典空间的估计值。2006年, Gao J^[2]引入高继常数 $E(X)$, 给出 Banach 空间具有正规结构的几个充分条件, 并计算了它的取值范围。

2007年, Gao J^[3]引入带参数 $t > 0$ 的几何常数, 其中 $E(t, X) = \sup_{x, y \in S(X)} \{ \|x + ty\|^2 + \|x - ty\|^2 \}$ 。

Gao J 在文[4]中引入 $\xi, \eta > 0$ 的高继常数 $E_{\xi, \eta}(X)$, 其中

$$E_{\xi, \eta}(X) = \sup_{x, y \in S(X)} \{ \|\xi x + \eta y\|^2 + \|\xi x - \eta y\|^2 \}$$

并且得到了 Banach 空间 X 具有一致正规结构的几个充分条件, 同时给出 $E_{\xi, \eta}(X)$ 在一些具体空间中的估计值。同年王丰辉等计算出了 l_p 、 $L_p[0, 1]$ 和 Lorentz 空间的高继常数 $E(X)$ 的值。

2009年徐军^[5]给出高继常数的一个等价定义并且计算其在 $L_p[0, 1]$ 和 l_p 空间的精确值。

本文对广义 Von Neumann 常数 $E(\lambda, X)$ 的刻画在一定程度上发展了已有的关于非平凡 Banach 空间的相应结果。例如: 文[6-13]关于一些结果已

收稿日期: 2022-03-28

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A2016004)。

作者简介: 赵平安(1998—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 赵亮(1970—), 男, 博士, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: zhaoliang@hrbust.edu.cn。

经进行了简单的介绍,能够促进不同研究方向的交流与进步,文[14-15]给出了一些特殊的 Banach 空间的几何常数的计算式,类似地这里也计算了几个特殊 Banach 空间的广义 Von Neumann 常数。

1 预备知识

本文统一用 X 表示 Banach 空间, $B(X) = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, $S(X) = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ 分别代表 X 上的闭单位球和单位球面。

定义 1^[2] $E(X) = \sup \{ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 : x, y \in S(X) \}$ 称为 Banach 空间 X 上的高继常数。

定义 2^[9] Jordan-von Neumann 常数 $C_{NJ}(X)$ 的等价形式记作

$$C'_{NJ}(X) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} : x, y \in S(X) \right\}.$$

定义 3^[10] $L'_Y(\lambda, X) = \sup_{x, y \in S(X)} \{ \|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 + \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \}$, $\lambda \in [0, 1]$, 是用来描述平行四边形法则的常数。

定义 4^[16] 若存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x, y \in S(X)$, 或者 $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$ 或者 $\left\| \frac{x-y}{2} \right\| < 1 - \delta$, 则称 X 是一致非方的。

引理 1^[17] 设 $x, y \in S(X)$, 对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 如果 $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \varepsilon$, 那么对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, 有 $\|z\| > 1 - 2\varepsilon$ 。

引理 2^[18-19] Clarkson 不等式

1) 当 $1 \leq p \leq 2$ 时,

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \geq (\|x\| + \|y\|)^p + |\|x\| - \|y\||^p;$$

2) 当 $2 \leq p \leq \infty$ 时,

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq (\|x\| + \|y\|)^p + |\|x\| - \|y\||^p.$$

引理 3^[20] 设 $2 \leq p \leq \infty$. 若 $a, b \in R^+$, 则

$$1) a^p + b^p \leq (a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}};$$

$$2) (a^2 + b^2)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}} (a^p + b^p).$$

下面引入新常数, 它是 von Neumann 常数的推广。

2 主要结果及证明

定义 5 $E(\lambda, X) = \sup_{x, y \in S(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \right.$

$\left. \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\}$, $\lambda \in (0, 1)$, 称为 Banach 空间 X 的广义 Von Neumann 常数。

$$E\left(\frac{1}{2}, X\right) = C'_{NJ}(X) = \frac{E(X)}{4} = L'_Y\left(\frac{1}{2}, X\right),$$
 这里

$L'_Y(\lambda, X)$ 是 Liu Q 等^[9]在 2021 年引入的。

性质 1

1) 对称性: $E(\lambda, X) = E(1-\lambda, X)$;

2) 连续性: $E(\lambda, X)$ 在 $(0, 1)$ 上关于 λ 是连续的;

3) 有界性: 若 X 是维数大于 2 的 Banach 空间, 那么 $\frac{1}{2} \leq E(\lambda, X) \leq 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2}$;

4) 一致非方性: 若对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, 使得

$$E(\lambda, X) \leq \begin{cases} 2\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}, & \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2\lambda^2 - 6\lambda + \frac{9}{2}, & \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases},$$
 则 X 是一致非方的。

证明: 1) 取 $\bar{x} = x, \bar{y} = -y$,

于是 $\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\| = 1$, 则 $\bar{x}, \bar{y} \in S(X)$, 因此有

$$\begin{aligned} E(1-\lambda, X) &= \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in S(X)} \left\{ \left\| (1-\lambda)\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y} \right\|^2 + \right. \\ &\left. \left\| \lambda\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{y} \right\|^2 \right\} = \sup_{x, y \in S(X)} \left\{ \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \right. \\ &\left. \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\} = E(\lambda, X), \end{aligned}$$

2) 一方面, 对任意的 $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, $x, y \in S(X)$,

$$\varepsilon > 0, \text{ 存在 } \delta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0, \text{ 当 } 0 < \delta < \delta_0,$$

$$\text{记 } a = \left\| (\lambda + \delta)x + \frac{1}{2}y \right\| - \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$b = \left\| (\lambda + \delta)x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$c = \left\| [1 - (\lambda + \delta)]x - \frac{1}{2}y \right\| - \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$d = \left\| [1 - (\lambda + \delta)]x - \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$A = \left\| (\lambda + \delta)x + \frac{1}{2}y - \lambda x - \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$B = (\lambda + \delta)\|x\| + \frac{1}{2}\|y\| + \lambda\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|,$$

$$C = \left\| [1 - (\lambda + \delta)]x - \frac{1}{2}y - (1-\lambda)x + \frac{1}{2}y \right\|,$$

$$D = [1 - (\lambda + \delta) + (1 - \lambda)] \|x\| + \|y\|,$$

我们得到, $a \leq A, b \leq B, c \leq C, d \leq D$,

$$\left\| (\lambda + \delta)x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| [1 - (\lambda + \delta)]x - \frac{1}{2}y \right\|^2 -$$

$$\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 - \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 = ab + cd \leq$$

$$AB + CD = \delta(2\lambda + \delta + 1) + (-\delta)(3 - 2\lambda - \delta) =$$

$$2\delta(\delta + 2\lambda - 1) \leq 2\delta^2 < \varepsilon,$$

那么我们有 $|E(\lambda + \delta, X) - E(\lambda, X)| < \varepsilon$,

另一方面, 对任意的 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$, 取 $\tilde{\lambda} = 1 - \lambda \in (0, \frac{1}{2}]$, 显然有 $E(\tilde{\lambda}, X)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 是连续的, 那么对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$|E(\tilde{\lambda}_1, X) - E(\tilde{\lambda}_2, X)| < \varepsilon,$$

若对 $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in (0, \frac{1}{2}]$, $|\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2| < \delta_0$, 有

$E(\lambda, X) = E(1 - \lambda, X) = E(\tilde{\lambda}, X)$, 可以得到

$$|E(\lambda_2, X) - E(\lambda_1, X)| = |E(\tilde{\lambda}_1, X) - E(\tilde{\lambda}_2, X)| < \varepsilon, \text{ 即 } E(\lambda, X) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上关于 } \lambda \text{ 是连续的.}$$

3) 一方面, 对于任意的 $x, y \in S(X)$,

$$\begin{aligned} \text{由于 } \|x \pm y\| &\leq \|x\| + \|y\|, \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| \leq \\ \lambda \|x\| + \frac{1}{2} \|y\| &= \lambda + \frac{1}{2}, \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \leq \\ (1 - \lambda) \|x\| + \frac{1}{2} \|y\| &= 1 - \lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \lambda, \end{aligned}$$

由 $E(\lambda, X)$ 的定义知 $E(\lambda, X) \leq (\lambda + \frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{2} - \lambda)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2}$, 另一方面, 对于任意的 $x, y \in S(X)$,

$$\begin{aligned} \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| &\geq \\ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y + (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| &= \|x\| = 1, \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} E(\lambda, X) &\geq \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \geq \\ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + (1 - \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|)^2 &= \\ 2 \left[\left(\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4) 应用反证法, 若 X 不是一致非方的, 则对任

意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 存在 $x, y \in S(X)$, 使得

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\| > 1 - \varepsilon \text{ 且 } \left\| \frac{x - y}{2} \right\| > 1 - \varepsilon,$$

根据引理 1 知

$$\begin{aligned} 1 - 2\varepsilon < \|z\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = \\ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)y \right\| &\leq \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left| \frac{1}{2} - \lambda \right|, \text{ 可} \\ \text{以推得} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| &> 1 - 2\varepsilon - \left| \frac{1}{2} - \lambda \right|, \\ \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| &= \left\| \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)x - \frac{1}{2}(x - y) \right\| \geq \\ \frac{1}{2} \|x - y\| - \left| \frac{1}{2} - \lambda \right| &> 1 - \varepsilon - \left| \frac{1}{2} - \lambda \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 &> \\ \left(1 - 2\varepsilon - \left| \frac{1}{2} - \lambda \right| \right)^2 + \left(1 - \varepsilon - \left| \frac{1}{2} - \lambda \right| \right)^2, \end{aligned}$$

由 ε 的任意性知

$$\begin{aligned} \text{当 } \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \text{ 时, } E(\lambda, X) &> \left(1 - \frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + \\ \left[1 - \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\right]^2 &= 2\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \text{ 时, } E(\lambda, X) &> \left(1 - \lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \\ \left[1 - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\right]^2 &= 2\lambda^2 - 6\lambda + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

又由 $E(\lambda, X)$ 的取值范围知

$$\begin{aligned} \text{当 } \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \text{ 时, } 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} &\geq 2\lambda^2 + 2\lambda + \\ \frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \text{ 时, } 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} &\geq 2\lambda^2 - 6\lambda + \\ \frac{9}{2} &\geq \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

$$E(\lambda, X) > \begin{cases} 2\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2}, & \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2\lambda^2 - 6\lambda + \frac{9}{2}, & \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

这与所给条件矛盾! 则 X 是一致非方的。

定理 1 设 X 是非平凡的 Banach 空间, 有

$$E(\lambda, X) = \sup_{x, y \in B(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1 - \lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\}.$$

证明: 首先显然有

$$\sup_{x,y \in S(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\} \leqslant \sup_{x,y \in B(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\}.$$

下面只需证相反不等式即可,

$$\text{令 } g(t) = \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2,$$

$$g_1(t) = \left\| tx + \frac{1}{2}y \right\|^2, g_2(t) = \left\| tx - \frac{1}{2}y \right\|^2.$$

下面证明 $g_1(t)$ 是凸的偶函数,

$$g_1(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \left\| [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]x + \frac{y}{2} \right\|^2 =$$

$$\left\| \lambda \left(t_1 x + \frac{y}{2} \right) + (1-\lambda) \left(t_2 x + \frac{y}{2} \right) \right\|^2 \leqslant$$

$$\lambda \left\| t_1 x + \frac{y}{2} \right\|^2 + (1-\lambda) \left\| t_2 x + \frac{y}{2} \right\|^2.$$

于是 $g_1(t)$ 是凸的偶函数,同样可以证得 $g_2(t)$ 是凸的偶函数,两个凸的偶函数的和 $g(t)$ 是凸的偶函数,对任意的 $x, y \in B(X)$, 对于 $\|x\| \leqslant 1$, 有 $g(t) \leqslant$

$$g\left(\frac{t}{\|x\|}\right),$$

$$\sup_{x,y \in B(X)} \left\{ \left\| (1-\lambda)x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| \lambda x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\} \leqslant$$

$$\sup_{x,y \in B(X)} \left\{ \left\| (1-\lambda)\frac{x}{\|x\|} + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| \lambda\frac{x}{\|x\|} - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\} =$$

$$\sup_{\substack{x \in S(X) \\ y \in B(X)}} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{y}{2} \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{y}{2} \right\|^2 \right\},$$

$$\text{令 } h(t) = \left\| \lambda x + \frac{t}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{t}{2}y \right\|^2,$$

其中 λ 是固定的,

$$\text{取 } h_1(t) = \left\| \lambda_0 x + \frac{t}{2}y \right\|^2, h_2(t) = \left\| (1-\lambda_0)x - \frac{t}{2}y \right\|^2,$$

下面证明 $h_1(t)$ 是凸的偶函数,

$$h_1(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \left\| \lambda_0 x + \frac{[\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2]y}{2} \right\|^2 =$$

$$\left\| \lambda \lambda_0 x + (1-\lambda) \lambda_0 x + [\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2] \frac{y}{2} \right\|^2 =$$

$$\leqslant \lambda \left\| \lambda_0 x + \frac{t_1 y}{2} \right\|^2 + (1-\lambda) \left\| \lambda_0 x + \frac{t_2 y}{2} \right\|^2.$$

可见 $h_1(t)$ 是凸的偶函数,同样可以证得 $h_2(t)$ 是凸的偶函数,两个凸的偶函数的和 $h(t)$ 是凸的偶函数,对任意的 $y \in B(X)$, 有 $\|y\| \leqslant 1$, 于是 $h(1) \leqslant$

$$h\left(\frac{1}{\|y\|}\right), \text{ 则}$$

$$\sup_{\substack{x \in S(X) \\ y \in B(X)}} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{y}{2} \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{y}{2} \right\|^2 \right\} = h(1) \leqslant$$

$$h\left(\frac{1}{\|y\|}\right) = \sup_{\substack{x \in S(X) \\ y \in B(X)}} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{y}{2\|y\|} \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{y}{2\|y\|} \right\|^2 \right\} =$$

$$\sup_{x,y \in S(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\},$$

于是得到广义 Von Neumann 常数的等价形式

$$E(\lambda, X) = \sup_{x,y \in B(X)} \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right\}.$$

以下例子计算了几个特殊 Banach 空间的广义 Von Neumann 常数.

3 实例

$$\text{例 1 } 1) E(\lambda, l_1) = 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2};$$

$$2) \text{ 当 } 1 \leqslant p \leqslant 2 \text{ 时, } E(\lambda, l_p) \leqslant 2^{1-\frac{2}{p}} \{ [1 + (2-2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} + [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} \};$$

$$3) \text{ 当 } 2 \leqslant p \leqslant \infty \text{ 时, } E(\lambda, l_p) = 2^{-\frac{2}{p}} \left\{ \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} + \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \right\};$$

$$4) \quad 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} \geqslant E(\lambda, l_\infty) \geqslant \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{4}, \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ \lambda^2 + \frac{1}{4}, \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

证明: 1) 取 $x = (1, 0, 0 \cdots), y = (0, 1, 0 \cdots)$, 则

$\|x\| = \|y\| = 1$, 由 $E(\lambda, X)$ 的取值范围有

$$2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} \geqslant E(\lambda, l_1) \geqslant \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 +$$

$$\left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 = \left\| \left(\lambda, \frac{1}{2}, 0, \cdots \right) \right\|^2 +$$

$$\left\| \left(1-\lambda, -\frac{1}{2}, 0, \cdots \right) \right\|^2 = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^2 =$$

$$2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2},$$

$$\text{于是得到 } E(\lambda, l_1) = 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2}.$$

2) 当 $1 \leqslant p \leqslant 2$ 时, 对任意的 $x, y \in S(l_p)$, 取 $a = \lambda x + \frac{1}{2}y, b = (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y$, 由引理 2 Clarkson 不等式有

$$\|a+b\|^p + \|a-b\|^p \geqslant (\|a\| + \|b\|)^p + |\|a\| - \|b\||^p$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \text{ 时, } \left(\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \right)^p \\ & \leq 1 + (|2\lambda - 1| + 1)^p = 1 + (2 - 2\lambda)^p, \\ & \text{当 } \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \text{ 时, } \left(\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \right)^p \leq 1 \\ & + (|2\lambda - 1| + 1)^p = 1 + (2\lambda)^p, \text{ 进而得到} \\ & \left(\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \right)^p \leq \min \{1 + (2 - 2\lambda)^p, \\ & 1 + (2\lambda)^p\} \leq \frac{1 + (2 - 2\lambda)^p + 1 + (2\lambda)^p}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{那么两边同时开 } p \text{ 次方得到 } \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \\ & \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \leq \left(\frac{1 + (2 - 2\lambda)^p + 1 + (2\lambda)^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & 2^{-\frac{1}{p}} [1 + (2 - 2\lambda)^p + 1 + (2\lambda)^p]^{\frac{1}{p}} \leq 2^{-\frac{1}{p}} \{ [1 + (2 - \\ & 2\lambda)^p]^{\frac{1}{p}} + [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{1}{p}} \}; \end{aligned}$$

上式两边再平方得到

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \leq \\ & \left(\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\| + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\| \right)^2 \leq \\ & \{2^{-\frac{1}{p}} \{ [1 + (2 - 2\lambda)^p]^{\frac{1}{p}} + [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{1}{p}} \}\}^2 \leq \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \{ [1 + (2 - 2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} + [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{根据 } E(\lambda, X) \text{ 的定义知, } E(\lambda, l_p) - \varepsilon \leq \\ & \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \{ [1 + (2 - 2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} + \\ & [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} \}, \end{aligned}$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$,

于是得到

$$E(\lambda, l_p) \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \{ [1 + (2 - 2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} + [1 + (2\lambda)^p]^{\frac{2}{p}} \}.$$

3) 当 $2 \leq p \leq \infty$ 时, 对任意的 $x, y \in S(l_p)$, 取 $a =$

$$\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|, b = \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|,$$

由 $E(\lambda, X)$ 的定义及引理 3 知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} & E(\lambda, l_p) - \varepsilon \leq \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \leq \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^p \right]^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

再根据引理 4 Clarkson 不等式

$$\begin{aligned} & \|a + b\|^p + \|a - b\|^p \leq (\|a\| + \|b\|)^p \\ & + |\|a\| - \|b\||^p, \end{aligned}$$

当 $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$ 时,

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^p \leq \\ & \left\| (1-\lambda)x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^p \leq \\ & (1 - \lambda + \frac{1}{2})^p + \left| 1 - \lambda - \frac{1}{2} \right|^p = \left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \\ & \left| \frac{1}{2} - \lambda \right|^p = \\ & \left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E(\lambda, l_p) - \varepsilon \leq \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \leq \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

当 $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时,

$$\begin{aligned} & \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^p = \\ & \left\| (1-\lambda)x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| \lambda x - \frac{1}{2}y \right\|^p \leq \\ & \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^p + \left\| \lambda x - \frac{1}{2}y \right\|^p \leq \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p, \\ & E(\lambda, l_p) - \varepsilon \leq \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 \leq \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}}, \end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 整理可以得到

$$E(\lambda, l_p) \leq \begin{cases} 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}}, & \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}}, & \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}, \text{即}$$

$$\begin{aligned} & E(\lambda, l_p) \leq \min \left\{ 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}}, \right. \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \left. \right\} \leq \\ & \frac{1}{2} \left\{ 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} + \right. \\ & 2^{1-\frac{2}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \left. \right\} = \\ & 2^{-\frac{2}{p}} \left\{ \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} + \right. \\ & \left. \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \right\}, \end{aligned}$$

另一方面,取

$$x = 2^{-\frac{1}{p}}(1, 1, 0, \cdots), y = 2^{-\frac{1}{p}}(1, -1, 0, \cdots) \in l_p, \text{ 有 } \|x\| = \|y\| = 1, \text{ 则}$$

$$\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|_p = 2^{-\frac{1}{p}} \left\| \left(\lambda + \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}, 0, \cdots \right) \right\|_p = 2^{-\frac{1}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|_p = 2^{-\frac{1}{p}} \left\| \left(\frac{1}{2} - \lambda, \frac{3}{2} - \lambda, 0, \cdots \right) \right\|_p = 2^{-\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|_p^2 = 2^{-\frac{2}{p}} \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}},$$
$$\left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|_p^2 = 2^{-\frac{2}{p}} \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}},$$

由于

$$E(\lambda, l_p) = \sup \left\{ \left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|_p^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|_p^2 \right\} \geq 2^{-\frac{2}{p}} \left\{ \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} + \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \right\},$$

综上得到,当 $2 \leq p \leq \infty$ 时,

$$E(\lambda, l_p) = 2^{-\frac{2}{p}} \left\{ \left[\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^p + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} + \left[\left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^p + \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^p \right]^{\frac{2}{p}} \right\}$$

4) 取 $x = (1, 0, \cdots), y = (0, -1, 0, \cdots)$,

$\|x\| = \|y\| = 1$, 由 $E(\lambda, X)$ 的取值范围有

$$2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} \geq E(\lambda, l_\infty) \geq$$

$$\left\| \lambda x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x - \frac{1}{2}y \right\|^2 = \left\| \left(\lambda, \frac{1}{2}, 0, \cdots \right) \right\|^2 + \left\| \left(1-\lambda, -\frac{1}{2}, 0, \cdots \right) \right\|^2 = \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{4}, \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ \lambda^2 + \frac{1}{4}, \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases},$$

进而得到

$$2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} \geq E(\lambda, l_\infty) \geq \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{4}, \lambda \in (0, \frac{1}{2}] \\ \lambda^2 + \frac{1}{4}, \lambda \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

设 $C[a, b]$ 是 $[a, b]$ 上所有实连续函数的线性空间,其范数定义为: $\|x\| = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$.

例 2 $E(\lambda, X)$ 在 $C[a, b]$ 空间的值:

$$E(\lambda, C[a, b]) = 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2}.$$

证明:令 $x(t) = \frac{t-b}{a-b}, y(t) = 1 + \frac{b-t}{a-b}$,

$\|x(t)\| = 1, \|y(t)\| = 1$, 因为对任意非平凡的 Banach 空间 X 均有

$$2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2} \geq E(\lambda, C[a, b]) \geq$$

$$\left\| \lambda x(t) + \frac{1}{2}y(t) \right\|^2 + \left\| (1-\lambda)x(t) - \frac{1}{2}y(t) \right\|^2 = \sup_{t \in [a, b]} \left| \lambda \frac{t-b}{a-b} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b-t}{a-b} \right) \right|^2 + \sup_{t \in [a, b]} \left| (1-\lambda) \frac{t-b}{a-b} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b-t}{a-b} \right) \right|^2 = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \lambda \right)^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{2}, \text{ 即证。}$$

4 结 论

本文通过给出一个新的 von Neumann 常数的定义,计算了其在具体空间的真实值或估值,并应用其判别了空间的一致非方性。

参 考 文 献:

- [1] GAO J. Normal Structure and Pythagorean Approach in Banach Spaces[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2005, 51(2): 19.
- [2] GAO J. A Pythagorean Approach in Banach Spaces[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2006, 2006: 1.
- [3] GAO J. Normal Structure and Some Parameters in Banach Spaces[J]. Nonlinear Func. Anal. Appl. 2005, 10(2): 299.
- [4] GAO J. On the Generalized Pythagorean Parameters and the Applications in Banach Spaces[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-B, 2007, 8(3): 557.
- [5] 徐军. Banach 空间的一些几何常数及其性质[D]. 哈尔滨:哈尔滨理工大学, 2009.
- [6] 杨长森, 杜艳霞, 陈利. 广义 James 常数和一致正规结构[J]. 河南师范大学学报: 自然科学版, 2008, 36(3): 7.
YANG Changsen, DU Yanxia, CHEN Li. Generalized James Constant and Consistent Formal Structure[J]. Journal of Henan Normal University: Natural Science Edition, 2008, 36(3): 7.

- [7] 杨祥钊. Banach 空间的若干几何常数及其性质[D]. 南宁:广西师范学院, 2012.
- [8] 郑亚男. 广义高继常数与广义光滑模的一些性质[J]. 河南师范大学学报, 2011(4):12.
ZHENG Yanan. On the Generalized James Constant and Uniform Normal Structure[J]. Journal of Henan Normal University, 2011(4): 12.
- [9] LIU Q, SARFRAZ M, LI Y. Some Aspects of Generalized Zbăganu and James Constant in Banach Spaces[J]. Demonstratio Mathematica, 2021, 54(1): 299.
- [10] LIU Q, YANG Z, SARFRAZ M, et al. On New Parameters Concerning a Generalization of the Parallelogram Law in Banach Spaces [J]. arXiv preprint arXiv: 2110.15741, 2021.
- [11] KOMURO N, MITANI K I, SAITO K S, et al. A Comparison Between James and Von Neumann-Jordan Constants[J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2017, 14(4): 1.
- [12] FU Y, LIU Q, LI Y. New Geometric Constants in Banach Spaces Related to the Inscribed Equilateral Triangles of Unit Balls[J]. Symmetry, 2021, 13(6): 951.
- [13] 赵亮, 张兴. Banach 空间中的广义光滑模[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2016, 21(4): 112.
ZHAO Liang, ZHANG Xing. Generalized Modulus of Smoothness in Banach Spaces[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2016, 21(4): 112.
- [14] CHEN B, LIU Q, LI Y. Inscribed Triangles in the Unit Sphere and a New Class of Geometric Constants [J]. Symmetry, 2022, 14(1): 72.
- [15] CHEN B, YANG Z, LIU Q, et al. Some New James Type Geometric Constants in Banach Spaces[J]. Symmetry, 2022, 14(2): 405.
- [16] JAMES R C. Uniformly Non-square Banach Spaces[J]. Annals of Mathematics, 1964, 80(3): 542.
- [17] GAO J, LAU K S. On Two Classes of Banach Spaces with Uniform Normal Structure[J]. Studia Mathematica, 1991, 1(99): 41.
- [18] CLARKSON J A. Uniformly Convex Spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1936, 40(3): 396.
- [19] DAY M M. Normed Linear Spaces[M]//Springer, Berlin, Heidelberg, Normed Linear Spaces, 1973: 27.
- [20] KHAMSI M A, KIRK W A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory[M]. John Wiley & Sons, 2001: 138.

(编辑:温泽宇)